INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE & DE PROSPECTION MINIERE

Concours de 1977

Composition de MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction.

Les deux problèmes sont indépendants. On peut admettre un résultat à condition de le signaler explicitement.

Premier problème.

Dans ce problème, on considère une épreuve à deux éventualités A et B qualifiées respectivement de succès et d'échec. On connaît les probabilités p de A et $q = 1-p$ de B. On suppose $pq \neq 0$.

- I -

1°) n étant un entier donné strictement supérieur à 2, on envisage les deux fonctions réelles de la variable réelle x définies sur le segment $[0, 1]$ par $f(x) = 1 - x^n - (1 - x)^n$, $g(x) = \frac{n x}{1+ (n-1)x}$

Etudier les variations de chacune. On se propose d'en tracer les graphiques dans un même repère. Pour cela, étudier les positions relatives des deux courbes au voisinage de l'origine. Calculer et comparer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire que les deux courbes ont au moins un point commun sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. On admettra qu'il est unique.

2°) Soit Ω_n l'ensemble des suites des résultats d'un nombre fini n d'épreuves successives indépendantes (cf. préambule) avec $n \geqslant 2$. Soit D l'événement : en n épreuves, on obtient les deux types de résultats (succès et échecs), et D' l'événement : en n épreuves, on a au plus un succès. Quelle relation doivent vérifier n et p pour que D et D' soient indépendants ? Montrer que, pour n donné, cette relation n'est vérifiée que pour une seule valeur de p. Déterminer cette valeur de p pour $n = 3$. Montrer que, pour $n = 4$, p est solution d'une équation de la forme $\varphi(x) = 0$ où φ est un polynome à coefficients entiers. Donner la valeur approchée de p obtenue en appliquant une fois la méthode des parties proportionnelles entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

.../...

- II -

On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x, c'est-à-dire le nombre défini par $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$. On pose, par convention, pour n entier positif, $C_n^0 = 1$. Démontrer, pour a et b réels distincts et pour n entier supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum (-1)^k C_{n-k-1}^k (ab)^k (a+b)^{n-2k-1}$$

la sommation étant effectuée suivant k et étendue de $k = 0$ à $k = E\left(\frac{n-1}{2}\right)$

On pourra démontrer d'abord que

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = (a+b) \frac{a^n - b^n}{a - b} - (ab) \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}$$

puis raisonner par récurrence en supposant n pair, puis n impair.

- III -

Dans l'ensemble Ω_n (cf. I,2°), on appelle doublé l'apparition de deux succès consécutifs (trois succès consécutifs forment deux doublés).

1°) Soit $e_{n,k}$ l'événement : on obtient exactement k succès en n épreuves au cours desquelles on a un unique doublé se produisant aux deux dernières.

a) expliciter l'ensemble des suites de six résultats pour lesquelles chacun des événements $e_{6,k}$ est réalisé.

b) pour n quelconque, quelles sont, en fonction de $E\left(\frac{n}{2}\right)$ les valeurs de k pour lesquelles l'événement $e_{n,k}$ est de probabilité non nulle ? Quelle est la probabilité $u_{n,k}$ de $e_{n,k}$?

c) Soit $\mathcal{E}_n$ l'événement : en n épreuves on obtient un doublé unique apparaissant avec les deux dernières. Montrer que la probabilité U_n de $\mathcal{E}_n$ est la somme des $u_{n,k}$ étendue à un ensemble de valeurs de k qu'on précisera.

2°) a) Montrer qu'il existe deux réels a et b distincts tels que $ab = -pq$ et $a+b = q$. En rapprochant la valeur de U_n trouvée ci-dessus du second membre de la formule démontrée dans la partie II, donner de U_n une expression plus simple en fonction de a et b.

.../...

b) Montrer que les valeurs absolues de a et b sont strictement inférieures à 1. U_n a-t-elle une limite pour n infini ?

3°)a) Soit une suite de n_1 épreuves successives indépendantes, n un entier, les entiers n et n_1 vérifiant $2 \leqslant n \leqslant n_1$. Soit l'événement $\mathcal{F}_{n,n_1}$: obtenir au cours des n premières épreuves un doublé unique se produisant aux rangs n-1 et n. Calculer la probabilité de $\mathcal{F}_{n,n_1}$ et montrer qu'elle est indépendante de n_1.

Dans tout ce qui suit, on considère une suite illimitée d'épreuves successives indépendantes.

b) Quelle est la probabilité de l'événement C : on n'obtient aucun doublé.

c) Soit X la variable aléatoire réelle égale au rang de l'épreuve où se produit le premier succès du premier doublé. On pose, par convention, X (C) = 0. Calculer en fonction de a, b, $n \geqslant 1$ la probabilité de (X = n). Calculer en fonction de a et b, puis seulement de p, l'espérance et la variance de X.

Deuxième problème.

Dans tout le problème, x est réel, positif ou nul, ($x \in \mathbb{R}_+$), et t est réel, ($t \in \mathbb{R}$). Dans les questions (I, 1°), (I, 2°) on dressera suivant les valeurs de x, un tableau des divers résultats obtenus mis sous des formes aussi simples que possible. On se bornera, pour les séries du - II - à indiquer si elles sont convergentes ou non.

- I -

1°) Calculer $\int \frac{dt}{1 + x \sin t}$. On pourra faire un premier changement de variable défini par $t = 2 \operatorname{Arc\,tg} u$.

2°) Exprimer sans signe d'intégration la fonction F définie pour x positif ou nul

$$\text{par } F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x \sin t}$$

Etudier la continuité à droite de F au point x = 0, puis la continuité de F au point x = 1.

F (x) a-t-elle une limite pour x infini positif ?

3°) Pour quelles valeurs de x la formule $G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \sin t}$

définit-elle une fonction G de la variable x positive ou nulle ?
$G(x)$ a-t-elle une limite quand x tend vers 1 à gauche ?

- II -

1°) Etudier la série (U) de terme général $u_n = \frac{\text{Log } n}{n^2}$ où n désigne un entier positif ($n \in \mathbb{N}^*$), et où Log désigne le logarithme népérien (On pourra comparer à la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$).

2°) Etudier la série (V) de terme général $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + n^2 \sin t}$

(On pourra chercher un équivalent de v_n).

3°) α étant réel positif fixe, on se propose d'étudier la série (W) de terme général

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 + n^2 \sin t)^{\alpha}}$$

a) pour $\alpha \geqslant 1$ conclure en comparant à la série (V)

b) pour $0 < \alpha < 1$, montrer qu'il existe deux nombres strictement positifs (qu'on ne demande pas de calculer) indépendants de n encadrant $W_n\, n^{2\alpha}$. En déduire l'étude demandée.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail